

A EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS NO ESTUDO DA INTEGRAL DEFINIDA: UM OLHAR DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

The Equivalence Of Areas In The Study Of Defined Integral: a Look At Semiotic Representations

Lucia Menoncini

Méricles Thadeu Moretti

Resumo

Este trabalho discutiu um elemento que se encontra implícito no estudo da integral definida no cálculo de áreas: a equivalência de regiões planas. A resolução de problemas envolvendo áreas, via integração, geralmente aborda o esboço de uma única região plana, limitada entre curvas de funções. Entretanto, existem outras regiões com formatos distintos, mas com áreas equivalentes que podem ser exploradas. Assim, embasados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, analisou-se como alunos usam operações semióticas de tratamento e de conversão para desenvolverem atividades que exploram a equivalência de áreas. Foi possível constatar que os problemas envolvendo área requerem a mobilização de múltiplas operações semióticas e que a equivalência de áreas pode ser inserida no estudo da integral definida.

Palavras-chave: Equivalência de áreas; integral definida; semiótica

Abstract

This work discussed an element that is implicit in the study of the defined integral in the area calculation: the equivalence of flat regions. Solving problems involving areas, by integration, usually approach the sketch of a single flat region, bounded between function curves. However, can be explored other regions with different shapes but with equivalent areas. Thus, based on Duval's Theory of Registers of Semiotic Representations, we analyzed how students use semiotic treatment and conversion operations to develop activities that explore the equivalence of areas. It was found that the problems involving area require the mobilization of multiple semiotic operations and that the equivalence of areas can be inserted in the study of the definite integral.

Keywords: Area equivalence; definite integral; semiotics.

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral ou simplesmente Cálculo é um dos componentes curriculares que integra a matemática elementar do ensino superior, nos cursos de ciências exatas. A presença e a importância do Cálculo neste nível de ensino justificam-se pela contribuição à instrumentalização da formação científica matemática que possibilita desvelar, analisar e resolver diversos fenômenos ligados à ciência. Ele fornece uma visão ampla e profunda não apenas da matemática, mas de suas relações com outras áreas do conhecimento.

Em meio aos assuntos contemplados pelo Cálculo está a integral definida no cálculo de área, a qual amplia os estudos introduzidos pela Geometria Euclidiana, à medida que possibilita determinar áreas de figuras mais gerais, cujos contornos são curvas, como por exemplo, a área de uma elipse.

Dentre as diversas ferramentas para o processo de ensino e de aprendizagem da integral no cálculo de área, destaca-se o livro texto de Cálculo, pois geralmente é o principal ou o único material didático utilizado por professores e por alunos. Neste sentido, reconhecendo a importância do livro texto, busca-se conhecer o enfoque metodológico de três autores, quanto à temática em estudo. Da observação foi possível reconhecer similaridades entre seus enfoques, especialmente quanto à apresentação dos problemas e aos métodos de resolução. Em geral, os problemas são apresentados predominantemente na forma discursiva e a resolução dos mesmos tende a seguir um procedimento padrão, baseado no esboço de

curvas, na identificação de uma região plana e na aplicação de uma fórmula que envolve integral definida para determinar a área da região.

Para além do enfoque dos autores, há outros aspectos que podem ser abordados no estudo da integral no cálculo de área. É o caso da equivalência de áreas, que está implícita no referido estudo e que ao ser explicitada pode representar um ganho de conhecimento em relação ao estudo da integral. Assim, neste trabalho, a equivalência de áreas é explorada algébrica e graficamente a partir de operações semióticas atreladas à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Como o nome da Teoria já sugere, o seu principal conceito é o *registro de representação semiótica* ou simplesmente *registro*, e como tal deve cumprir três operações semi-cognitivas:

- i) a *formação* que serve para constituir uma marca ou um conjunto de marcas, reconhecidas como representação de algo em determinado sistema semiótico;
- ii) o *tratamento* que é uma atividade que ocorre no interior do registro ou do sistema semiótico e consiste na transformação de uma representação em outra, obedecendo regras próprias do sistema;
- iii) a *conversão* que ocorre entre registros e modifica a forma do objeto, pois a representação do objeto pertencente a um dado registro é transformada em outra representação pertencente a outro registro.

As operações de formação, tratamento e conversão permitem reconhecer um objeto matemático e explorá-lo por meio de transformações da sua representação, levando à coordenação de transformações entre dois ou mais registros e possibilitando assim a aprendizagem matemática, segundo Duval (2004).

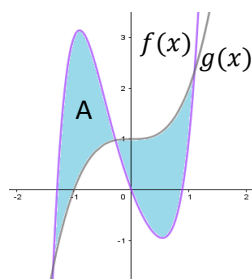
A transformação que acontece entre registros, chamada conversão, é uma operação não neutra, transformadora e produtora de conhecimentos. Converter uma representação

em outra produz novas significações relativas ao objeto representado, implicando em novos conhecimentos. Esta operação está diretamente associada à coordenação dos registros e à compreensão da matemática, conforme *hipótese fundamental* enunciada por Duval (2012, p. 282, grifos nosso): **“a compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão”**.

A conversão é pouco explorada no ensino e às vezes é negligenciada por ser entendida como simples mudança de registro que se desenvolve por conta própria, à medida que se consegue formar representações nos registros e desenvolver tratamentos sobre estas representações (DUVAL, 2012). Em geral, os alunos não conseguem realizar a conversão por conta própria, pois ela exige a análise, o domínio e a manipulação de conhecimentos nos diferentes registros, tornando-se uma tarefa de difícil execução. Assim, esta operação não é espontânea, tão pouco imediata para os alunos e precisa ser trabalhada no ensino, pois de acordo com a hipótese fundamental de Duval, é a rapidez e a espontaneidade com que ela é executada que conduz à coordenação dos registros e à compreensão conceitual.

Os registros de representação semiótica estão diretamente implicados à integral no cálculo de área, pois a resolução destes problemas requer a mobilização dos quatro grandes registros definidos por Duval (2004): o registro algébrico, o registro da língua natural, o registro gráfico e o registro geométrico. Em particular, uma nova nomenclatura de registro faz-se necessária, uma vez que a resolução dos problemas exige o esboço de curvas no plano cartesiano e estas curvas limitam uma região plana, formando uma figura geométrica. Nomea-se, então, registro gráfico-geométrico.

Figura 1: Registro gráfico-geométrico



Fonte: Autora

A figura geométrica A é formada a partir do esboço das curvas $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano, ao mesmo tempo que é uma representação geométrica. Assim, justifica-se a nomenclatura registro gráfico-geométrico para o registro que compreende as figuras geométricas representadas no plano cartesiano.

Diante do exposto, este trabalho apresenta e analisa duas atividades voltadas à exploração da equivalência de áreas junto ao estudo da integral definida no cálculo de áreas. Tais atividades, planejadas e analisadas sob a luz da Teoria de Duval (2004) visa identificar como alunos de um curso superior, com auxílio do software *GeoGebra*, utilizam operações semióticas para a resolução de problemas envolvendo equivalência de áreas.

Os problemas de área em livros textos de cálculo

Buscando identificar como os problemas de área são abordados em livros textos de Cálculo, foram analisados três materiais que fazem parte da bibliografia de cursos superiores, na área de ciências exatas:

- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2007.
- LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3ed. São Paulo: Harbra, 1994. v1.
- STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v1.

A observação destes materiais possibilitou reconhecer, de modo geral, os enfoques metodológicos dos autores, e em

particular, permitiu analisar de que forma a região de integração é utilizada na resolução dos exemplos e exercícios. Constatou-se que os enfoques são semelhantes, tanto quanto à apresentação de exemplos e exercícios quanto à resolução dos mesmos:

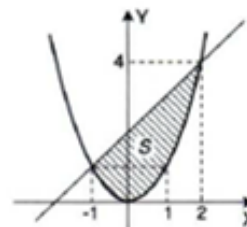
- a) A grande maioria dos exemplos e exercícios são apresentados discursivamente;
- b) A resolução dos exemplos segue um procedimento algoritmizado que consiste: no esboço das curvas e na identificação visual da região formada; na determinação dos pontos de interseção para encontrar o intervalo de integração $[a,b]$; na afirmação de que as curvas assumem valores não negativos em $[a,b]$; na aplicação da fórmula $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$ para o cálculo da área da região;

É unânime entre os autores partir do esboço das funções $f(x)$ e $g(x)$ para encontrar a região limitada entre suas curvas e utilizar a integral $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ para o cálculo da área.

Para exemplificar o enfoque metodológico supracitado, apresenta-se o **Exemplo**, de autoria de Flemming e Gonçalves (2007).

Exemplo: *Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.*

Para resolver o exemplo as autoras inicialmente apresentam a Figura 2, resultante do esboço das curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$.

 Figura 2: Região plana limitada por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$.


Fonte: Flemming e Gonçalves (2007, p. 275).

Em seguida destacam a região *hachurada S* e com base nela constatam que

os pontos de intersecção das curvas têm abscissas -1 e 2 e portanto, que o intervalo de integração é $[-1,2]$. Afirmam que neste intervalo, ambas as funções são positivas e que $x + 2 \geq x^2$. Por fim, encontram o valor da área S por meio do Teorema Fundamental do Cálculo:

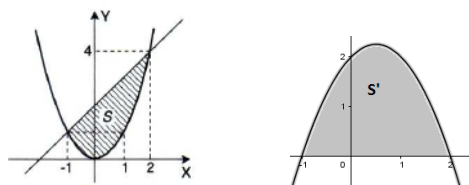
$$A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} \text{ u. a}$$

Observa-se que as autoras optam por encontrar a área da região S usando a integral

$A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx$, apesar de partirem da região S limitada pelas curvas $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 2$ (Figura 2). Não há menção sobre a origem ou a razão de usar a função integrando $h(x) = x + 2 - x^2$, transparecendo que $h(x)$ emerge ‘naturalmente’ no processo de resolução.

Contudo, $h(x)$ é uma função com propriedades algébricas e gráficas distintas das funções $f(x)$ e $g(x)$, sendo portanto, uma nova função. Graficamente, a região S' sob a curva $h(x) = x + 2 - x^2$ apresenta formato distinto da região S , conforme Figura 3.

Figura 3: Região S e região S'



Observando as regiões S e S' surge uma indagação:

Há relações entre as regiões?

Fonte: Autora

A área da região S é a diferença entre a área abaixo da curva de $f(x) = x + 2$ e a área abaixo de $g(x) = x^2$, sendo representada pela integral definida:

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \quad (I)$$

Sabendo que a integral $\int_a^b f(x) dx$ representa a área abaixo da curva $f(x)$ e $\int_a^b g(x) dx$ a área abaixo de $g(x)$, então a expressão (I) fornece a diferença

entre estas áreas, ou seja, fornece a área limitada entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$.

Ainda observando a região S' na Figura 3, constata-se que a área sob a curva $h(x) = f(x) - g(x) = x + 2 - x^2$ e acima do eixo x é calculada pela integral:

$$S' = \int_a^b h(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Ao calcular a integral S' é preciso interpretar o significado da operação de subtração entre as representações das funções $f(x)$ e $g(x)$ no registro algébrico. Neste caso, a integral fornece a área abaixo da curva $h(x) = x + 2 - x^2$, diferentemente da integral $S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$ que trata da área limitada entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$. De acordo com a propriedade $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, as duas expressões algébricas produzem o mesmo valor para a área, o que implica que as regiões S e S' apresentam uma relação de equivalência entre si.

A equivalência de áreas

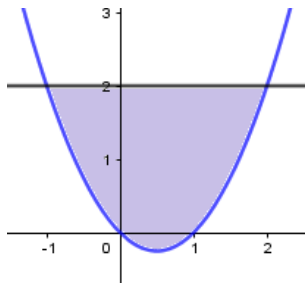
De acordo com a resolução do **Exemplo**, percebe-se que a função integrando $h(x) = x + 2 - x^2$ é utilizada para o cálculo da área S , mas sua curva não é esboçada, tão pouco é identificada a região abaixo do seu gráfico. Exemplos como este são recorrentes nos três livros textos de Cálculo analisados, sendo que em nenhum deles se explora a função $h(x)$.

A função integrando $h(x) = x + 2 - x^2$ não possui única representação no registro algébrico ou gráfico. Ela pode ser reescrita a partir de representações de outras funções e a combinação destas, acaba por gerar no registro gráfico-geométrico, regiões específicas com formatos variados, porém com áreas equivalentes, como se comprova pela propriedade $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. Para exemplificar, são apresentadas a seguir combinações de funções $f(x)$ e $g(x)$ que geram regiões equivalentes às regiões S e S' :

- a) Considerando $f(x) = 2$ e $g(x) = -x + x^2$ então $h(x)$ pode ser a diferença entre $f(x)$ e $g(x)$, isto é,

$h(x) = 2 + x - x^2$ e a região está limitada superiormente pela reta e inferiormente pela parábola:

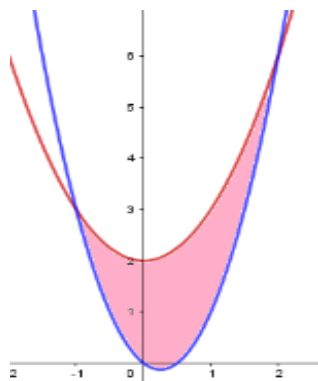
Figura 4: Região limitada pelas curvas $f(x) = 2$ e $g(x) = -x + x^2$



Fonte: Autora

- b) Sejam as funções $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 2x^2 - x$. Tomando a diferença entre tais funções, obtém-se $h(x) = x^2 + 2 - 2x^2 + x$ e a região fica limitada superiormente por $f(x)$ e inferiormente por $g(x)$, como mostra a Figura 5.

Figura 51: Região limitada pelas curvas $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 2x^2 - x$



Fonte: Autora

As figuras acima mostram que a função integrando $h(x) = x + 2 - x^2$ pode assumir diferentes representações semióticas e isso comprova que $h(x)$ pode ser explorada nos registros algébrico e gráfico-geométrico.

O processo de encontrar áreas equivalentes permite o desenvolvimento de tratamentos algébricos e figurais. Por meio deles são produzidas regiões que se apresentam sob diversos formatos, porém com a mesma área. Sendo assim, qualquer uma das

regiões apresentadas nas Figuras 4 e 5 poderia ser a região S mostrada na Figura 2.

Métodos e Resultados

Esta pesquisa de cunho qualitativo é um recorte da tese de doutorado. Os procedimentos metodológicos adotados basearam-se em elementos da Engenharia Didática de Artigue (1996), a qual visa planejar uma sequência didática com objetivo de obter informações para desvelar o fenômeno investigado. Naquele momento, organizou-se uma sequência didática voltada ao estudo e à aprendizagem da integral definida no cálculo de área e dentre as atividades desta sequência estão as **Atividades 1 e 2** apresentadas neste trabalho.

A **Atividades 1 e 2** foram planejadas com intuito de mostrar que a região A, associada à diferença entre as integrais $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, possui a mesma área que a região B, associada à integral $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$. Ademais, que a região A não é única e que portanto, outras regiões equivalentes podem ser determinadas a partir da exploração da função integrando por meio de diferentes registros de representação semiótica, especialmente tratamentos e conversões.

A proposta destas atividades possibilita aos alunos explorarem as regiões A e B, percebendo que apesar dos formatos distintos, são regiões equivalentes, que possuem a mesma área. Mais, percebam a existência de inúmeras regiões equivalentes à região A e ao mesmo tempo, saibam como encontrá-las por meio de tratamentos figurais ou algébricos.

Para o desenvolvimento das **Atividades 1 e 2**, contou-se com auxílio do software *GeoGebra*, que recobre diversos domínios do ensino e permite a construção, a visualização e a análise dinâmica de figuras e gráficos. Outrossim, possibilita o esboço de curvas de funções no mesmo plano cartesiano, contribuindo para a comparação qualitativa entre curvas e para a articulação entre diferentes registros de representação. Isso porque as representações semióticas produzidas nos registros gráfico e algébrico aparecem na mesma tela do computador e

cada alteração efetuada em uma das formas pode ser visível imediatamente na outra.

A análise dos dados está pautada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, por meio da qual buscou-se observar, interpretar e descrever as ações de alunos no que tange ao uso de operações semióticas, especialmente tratamentos e conversões, durante o desenvolvimento das **Atividades 1 e 2**. Tais alunos, nomeados ficticiamente por Aluno 1, Aluno 2, ... Aluno 18, frequentavam o componente curricular de Cálculo B, na terceira fase de um curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade pública.

Atividade 1:

- Sejam as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.
- Esboce as curvas no mesmo plano cartesiano e identifique a região C limitada por $f(x)$ e por $g(x)$. Faça um **print** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. Em seguida, observe a posição de cada curva, uma em relação a outra.
 - Que função limita superiormente a região C?
 - Que função limita inferiormente a região C?
 - Escreva uma expressão matemática que forneça a área C em função da **integral** de $f(x)$ e em função da **integral** de $g(x)$.
 - No GeoGebra, calcule a área C, usando **duplamente** o comando *Integral*, da forma *Integral* (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>) - *Integral* (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>). Escreva a integral definida e anote o resultado.
 - No GeoGebra, calcule novamente a área C, usando uma **única vez** o comando *Integral* (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>). Ao aplicar uma única vez o comando *Integral* é mostrada na tela do GeoGebra uma outra **região D** que não coincide com a região C. O valor da área C e da área D são iguais? Como o GeoGebra entendeu a **função integrando** $f(x) - g(x)$ utilizada no comando *Integral*? Justifique sua resposta. Faça um **print** da tela salvando-o no arquivo **Atividades Tese**.
 - A região D está limitada superiormente pela curva de uma função que será chamada $h(x)$. Encontre a expressão algébrica da função $h(x)$ e descreva como a encontrou. Em seguida esboce o gráfico de $h(x)$ no GeoGebra. Faça um **print** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.
 - A função $h(x)$ não é única. Ela pode ser escrita de diferentes maneiras por funções $F(x)$ e $G(x)$, que ao serem **subtraídas**, voltam à expressão $h(x)$. Por exemplo, $F(x) = x + 1$ e $G(x) = x^2 + 1$ formam $H(x) = (x + 1) - (x^2 + 1)$ em que a região abaixo desta $H(x)$ possui mesma área de $h(x) = x - x^2$.

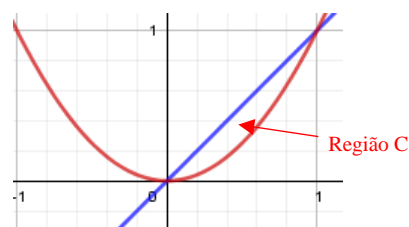
Encontre outras funções $F(x)$ e $G(x)$ e escreva uma nova expressão para $H(x)$, de modo que a área desta região se mantenha equivalente às áreas C e D.

- Oculte os gráficos de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ esboçados anteriormente (para isso, no GeoGebra, clique sobre a bolinha azul em frente às expressões algébricas das referidas funções). Em seguida, esboce o gráfico das funções $F(x)$ e $G(x)$ que você encontrou e identifique a região limitada por estas curvas, pintando-a. Faça um **print** da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**. Escreva a integral que fornece a área desta região e calcule esta área. Como são chamadas as regiões que possuem a mesma área?

Análise da Atividade

Usando o GeoGebra, os alunos efetuaram, de forma dinâmica, a conversão entre as representações das funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ no registro algébrico para representações no registro gráfico. Em seguida identificaram no registro gráfico a região C limitada entre as curvas $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$, como se observa no **print** de tela mostrado a seguir:

Figura 6: Região C, pelo Aluno 3



Fonte: Autora

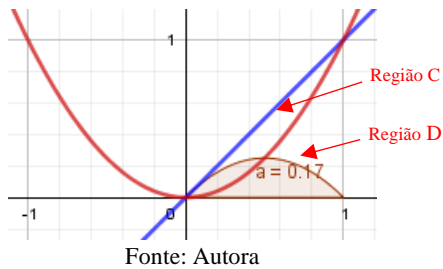
Observando o **print** é possível perceber que o Aluno 3 reconheceu a região C limitada superiormente pela curva $f(x) = x$ e inferiormente por $g(x) = x^2$.

Para encontrar a área C, em função da integral de $f(x)$ e da integral de $g(x)$, os alunos não tiveram dificuldades para escrever a expressão algébrica $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$. Usando duplamente o comando *Integral*, a referida expressão foi inserida no *GeoGebra* na forma *Integral* (x , 0, 1) - *Integral* (x^2 , 0, 1). Desta maneira, o *software* forneceu, na janela da álgebra, o valor 0,17 para a área e manteve inalterada a

representação da região C, no registro gráfico-geométrico, conforme Figura 6.

Na sequência, a atividade orientava a aplicação do comando *Integral* uma única vez. Nesta situação, o *GeoGebra* mostrou a imagem da Figura 7, capturada pelo *print* de tela feito pelo mesmo Aluno 3.

Figura 7: Regiões C e D, pelo Aluno 3



Ao usar uma única vez o comando *Integral*, uma outra região D foi gerada, com

Figura 8: Conjectura do Aluno 10

São iguais. O GeoGebra interpretou como a área de uma função $h(x) = x - x^2$ que tem mesma área, porém a região no plano cartesiano é diferente.

Fonte: Autora

Questionado sobre o valor das áreas C e D, o Aluno 10 afirmou que ‘são iguais’, isto é, possuem a mesma área, apesar de formatos distintos. Quanto à aparição da região D, na tela do *GeoGebra*, justificou que ao usar o comando *Integral* uma única vez, precisou escrever a função integrando na forma $L(x) = x - x^2$ e o *software* interpretou-o como uma nova função, apresentando a região parabólica sob a curva $L(x)$ em $[0,1]$, denominada região D. O fato de o aluno escrever a função $L(x)$ como diferença entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ sinaliza sua percepção acerca da existência de uma relação de equivalência de áreas entre as regiões.

formato distinto da região C, porém com a mesma área 0,17. Neste momento da atividade em que se questionou a origem da região D e sobre possíveis relações entre as regiões C e D, os alunos precisaram refletir e interpretar os dados inseridos no *GeoGebra* para justificarem a imagem visualizada na tela.

Comparando a integral $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$ registrada no papel com a integral $C = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$ inserida no *GeoGebra*, a partir da aplicação do comando *Integral* uma única vez, os alunos perceberam que as áreas C e D eram iguais e que a área C estava associada à primeira expressão enquanto que a área D estava associada à segunda integral. Com isso, conjecturaram relações, sendo uma delas apresentada abaixo:

Até o momento, tratou-se do reconhecimento das funções que limitam superior e inferiormente a região e da existência e distinção das regiões associadas às expressões $C = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 g(x)dx$ e $C = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$.

Na sequência, explorou-se a relação de equivalência entre as áreas das regiões C e D. Por meio de conversões e de tratamentos, os alunos buscaram representações de funções no registro algébrico que, ao serem convertidas para o registro gráfico-geométrico, produzissem regiões com áreas iguais às áreas C e D. Nas Figuras 9 e 10, o Aluno 2 explicita seu raciocínio.

Figura 9: Encontrando regiões equivalentes às regiões C e D, pelo Aluno 2

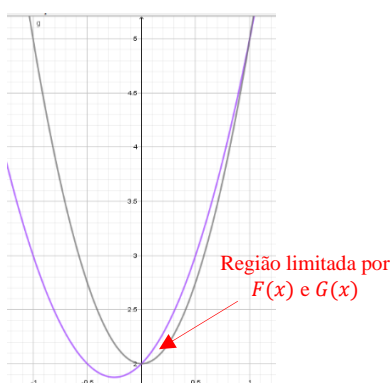
$$\begin{aligned}
 F(x) &= 2x^2 + x + 2 \\
 G(x) &= 3x^2 + 2 \\
 H(x) &= F(x) - G(x) \\
 &= (2x^2 + x + 2) - (3x^2 + 2) \\
 &= 2x^2 + x - 3x^2 - 2 \\
 &= x - x^2
 \end{aligned}$$

Fonte: Autora

Nesta figura, partindo de funções polinomiais do segundo grau, o Aluno 2 realizou tratamentos no registro algébrico para verificar que a região entre as curvas $F(x)$ e $G(x)$ é equivalente às regiões C e D. De fato, ele mostrou que a diferença entre as funções $F(x)$ e $G(x)$ escolhidas resultou na função integrando original, dada por $f(x) - g(x) = x - x^2$.

Determinadas as funções algébricas $F(x)$ e $G(x)$, com auxílio do *GeoGebra* o Aluno 2 realiza uma conversão para identificar a região procurada, conforme Figura 10.

Figura 10: Região equivalente às regiões C e D, criada pelo Aluno 2



Fonte: Autora

O *print* de tela mostrado na Figura 10 revela que o aluno efetuou a conversão das representações das funções $F(x) = 2x^2 + x + 2$ e $G(x) = 3x^2 + 2$ no registro algébrico para o registro gráfico. Observando as curvas

esboçadas é possível identificar a região equivalente às regiões C e D.

Esta atividade proporcionou o estudo da relação de equivalência de áreas entre regiões distintas. Inicialmente os alunos estabeleceram relações entre as regiões vinculadas às integrais $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$, concluindo que elas possuem a mesma área, apesar dos formatos distintos, como destacou o Aluno 10. Assim, puderam explorar a região sob a curva $h(x) = f(x) - g(x)$, a qual não é tratada em livros textos de Cálculo.

Em seguida, os alunos constataram que era possível encontrar diversas regiões equivalentes às regiões C e D, efetuando tratamentos e conversões algébricos e figurais, a exemplo do Aluno 2.

Atividade 2:

Considere a integral $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x)dx$.

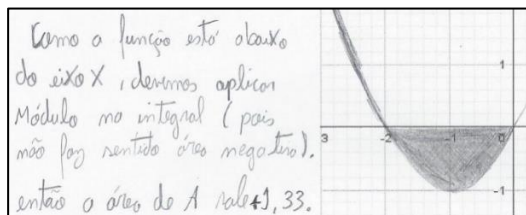
- Seja $h(x)$ a função integrando correspondente à integral dada. Esboce a curva $h(x)$ e identifique a região A no intervalo dado. Calcule a integral por meio do comando *Integral* (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>) e anote o resultado. Escreva como encontrar a área da região A. Faça um *print* da tela e salve no arquivo **Atividades Tese**.
- Encontre uma região B que seja equivalente à região A e descreva o procedimento utilizado.
- Represente graficamente a região B e faça um *print* da tela, salvando em **Atividades Tese**.

- d) Como provar que a região B é equivalente à região A?
 e) Enuncie um problema que envolva a integral $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx$.

Diferentemente da atividade anterior, em que o registro de partida era o registro discursivo, nesta atividade partiu-se do registro algébrico, com intuito de mostrar que é possível explorar diferentes registros de partida, considerando-os num mesmo patamar de importância para o processo de ensino e de aprendizagem do Cálculo.

Assim, dada a integral $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx$ os alunos esboçaram a curva que corresponde à função $h(x) = x^2 + 2x$ e identificaram a região A acima desta curva e abaixo do eixo x . Para encontrar a área A, justificaram que era necessário mais do que calcular a referida integral, conforme Figuras 11 e 12.

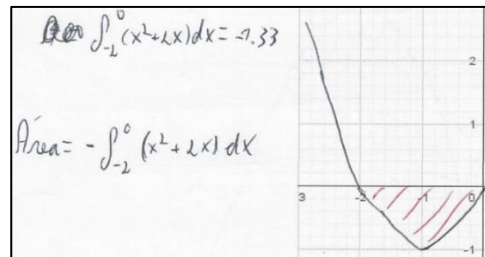
Figura 11: Identificação da região A, pelo Aluno 9



Fonte: Autora

Aqui, o Aluno 9 mobilizou sua percepção para reconhecer que a região A estava posicionada abaixo do eixo x e conseqüentemente, a integral associada à região seria negativa. Reconhecendo que a área é uma grandeza não negativa, usou o registro discursivo para justificar que a área poderia ser obtida aplicando o módulo à integral.

Figura 22: Identificação da região A, pelo Aluno 16



Fonte: Autora

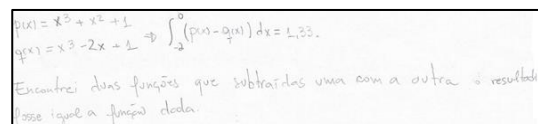
O Aluno 16 identificou a região A e calculou a integral de $f(x) = x^2 + 2x$ em $[-2, 0]$ encontrando resultado $-1,33$. Percebendo que o resultado negativo não correspondia à área da região, representou a área, no registro algébrico, pela integral multiplicada pela constante -1 .

Tanto o Aluno 9 quanto o Aluno 16 usaram dois registros para representar a área A. O primeiro representou-a no registro gráfico-geométrico e no registro discursivo enquanto que o segundo utilizou o registro gráfico-geométrico e o algébrico. Mesmo não sendo congruentes as representações, a conversão não foi um problema para os alunos. Isso demonstra que eles reconheceram o objeto área em suas diferentes formas, o que é uma condição para a aprendizagem matemática, segundo Duval (2004).

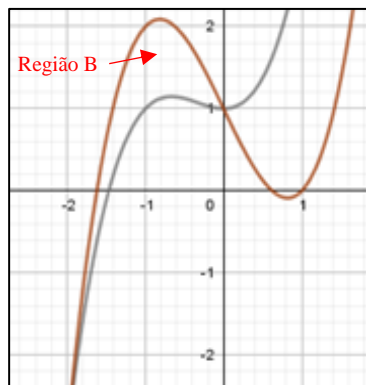
Para explorar regiões equivalentes à região A, os alunos encontraram representações de funções no registro algébrico que, quando convertidas no registro gráfico-geométrico, produziram regiões com a mesma área A. O procedimento empregado pelo Aluno 10 é apresentado a seguir:

Figura 13: Procedimento do Aluno 10 para encontrar uma região B

Etapa I - Representações das funções no registro algébrico



Etapa II - Representações das funções no registro gráfico-geométrico



Etapa III - Equivalência entre as regiões A e B

$$\text{Região A} = \int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx$$

$$\text{Região B} = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 + 1) - (x^3 - 2x + 1) dx = \int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx$$

Fonte: Autora

Na Etapa I o aluno encontrou duas funções polinomiais de terceiro grau, $p(x)$ e $q(x)$, e justificou discursivamente os tratamentos efetuados no registro algébrico, afirmando que a diferença entre as funções resultaria na representação da função $h(x) = x^2 + 2x$. Fazendo isso, garantiu que a região limitada por tais funções seria equivalente à região A. Na Etapa II, converteu as escritas algébricas de $p(x)$ e $q(x)$ em representações gráficas para identificar a região B, limitada pelas curvas cúbicas. Na Etapa III, associando as regiões A e B a suas respectivas integrais e efetuando tratamentos no registro algébrico, mostrou que tais regiões estavam associadas à mesma integral $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx$, dada no enunciado da atividade. Com isso, reafirmou a equivalência das áreas A e B.

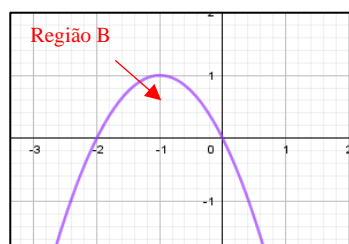
A maioria dos alunos desenvolveu procedimento semelhante ao do Aluno 10, chegando a uma região B limitada entre duas funções polinomiais. Outros, porém, encontraram uma região B limitada por uma curva polinomial e pelo eixo x , conforme retrata a Figura 14.

Figura 14: Procedimento do Aluno 14 para encontrar uma região B

Etapa I – Representação da função no registro algébrico

região da função $\Delta(x) = -x^2 - 2x$
pegue a função com sinal inverso a $h(x)$, logo a região B, formada pela curva do gráfico do $\Delta(x)$ será de área equivalente a $h(x)$

Etapa II - Representação da função no registro gráfico-geométrico



Etapa III – Equivalência entre as regiões A e B

Através do cálculo das integrais $\int_{-2}^0 h(x) = \int_{-2}^0 \Delta(x)$

Fonte: Autora

Na Figura 14, infere-se da Etapa I que o aluno, ao considerar a função $\Delta(x) = -x^2 - 2x$, oposta à função dada $h(x) = x^2 + 2x$, percebeu que esta última curva sofreria uma rotação em torno no eixo x . Posteriormente, a representação da função $\Delta(x) = -x^2 - 2x$ no registro algébrico foi convertida para o registro gráfico, possibilitando a identificação da região B, conforme Etapa II. Para verificar a equivalência das regiões, na Etapa III, o aluno recorreu ao registro discursivo para afirmar que bastava calcular as integrais das funções $h(x)$ e $\Delta(x)$, no intervalo $[-2, 0]$.

Até esse momento da atividade, os alunos exploraram tratamentos no registro figural e no registro algébrico, bem como efetuaram conversões em diferentes sentidos. Porém, faltava explorar a conversão do registro algébrico para o discursivo, a qual foi contemplada quando a atividade propunha criar um problema envolvendo a integral $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x) dx$.

Partindo da representação da integral no registro algébrico, os alunos elaboraram

seus discursos. A grande maioria usou termos que apareceram na sequência didática, a saber, “Calcule a área limitada por...”, “Esboce as curvas e identifique a área da região...”, “Encontre as funções limitantes da região...”. Isso revela que eles optaram por não se

arriscar a escrever algo diferente daquilo trabalhado nas atividades. Entretanto, 2 alunos fugiram um pouco deste padrão textual. Um dos problemas é exibido na Figura 15.

Figura 35: Problema elaborado pelo Aluno 10

Uma praça possui um gramado em forma de meia lua que coincide com a função $f(x) = x^2 + 2x$ no intervalo $[-2, 0]$. Qual o valor da área do gramado?

Fonte: Autora

De acordo com a figura acima, o Aluno 10 elaborou um problema envolvendo a área de uma praça e não se limitou aos termos citados anteriormente, empregados pela grande maioria dos colegas. Não era pretensão da atividade estimular a criatividade dos alunos, mas percebe-se que o aluno buscou contextualizar a situação. O problema enunciado pode ser considerado real, já que praças, muitas vezes possuem formatos geométricos cuja área não pode ser calculada pela Geometria Euclidiana, necessitando de conhecimentos do Cálculo Integral.

A conversão do registro algébrico para o discursivo não é contemplada em livros de Cálculo. Sabendo que estes materiais são, por vezes, a única ou a mais frequente ferramenta utilizada por professores e alunos no processo de ensino e de aprendizagem, acaba-se explorando sempre os mesmos sentidos de conversão e os mesmos registros de partida. Portanto, esta atividade privilegia outras conversões, para além das conversões do registro discursivo para o algébrico ou do algébrico para o gráfico, comumente abordadas em livros textos.

Considerações

O enfoque metodológico comumente partilhado por autores de livros textos de Cálculo, quanto ao estudo da integral no cálculo de área, consiste em um procedimento padrão que utiliza o esboço de curvas de funções $f(x)$ e $g(x)$ para determinar a região limitada entre as curvas, a qual é associada à

expressão $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$. Contudo, a área desta região é calculada por meio da integral $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$, cuja função integrando não é a função $f(x)$ ou a função $g(x)$, mas sim uma operação entre tais funções.

Esta função integrando $h(x) = f(x) - g(x)$ possui propriedades distintas de $f(x)$ e de $g(x)$ e conseqüentemente sua representação no registro gráfico acaba por formar uma região que se diferencia daquela limitada pelas curvas $f(x)$ e $g(x)$.

Buscando explorar estas diferentes representações de regiões, tanto no registro algébrico quanto no gráfico-geométrico, propôs-se o desenvolvimento das Atividades 1 e 2.

Na Atividade 1, os alunos puderam perceber diferentes representações de regiões quando usaram duplamente o comando *Integral*, que reportou à região limitada entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$, e quando usaram o referido comando uma única vez, em que foi necessário inserir a função integrando $h(x)$, cuja representação da região não coincidiu com a região inicial. Conseqüentemente, identificaram que as regiões possuíam a mesma área e que, portanto, a região associada à integral $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$ e a região associada à integral $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$ eram equivalentes.

Usando tratamentos, encontraram representações no registro algébrico que, quando convertidas no registro gráfico-

geométrico produziam regiões equivalentes às regiões já conhecidas. Desta forma, não só reconheceram a existência de inúmeras regiões que mantinham a relação de equivalência, como também o processo de encontrá-las, por meio do desenvolvimento de operações semióticas de tratamento e de conversão.

A Atividade 2 buscou privilegiar um registro de partida pouco abordado nos livros textos de Cálculo, que é o registro algébrico. Partindo da integral $\int_{-2}^0 (x^2 + 2x)dx$ e usando tratamentos e conversões, tratou-se da equivalência de áreas. Ademais, a atividade explorou o sentido de conversão do registro algébrico para o discursivo, em que os alunos precisaram utilizar o registro da língua natural para elaborar um problema que envolvia a integral dada.

As atividades foram planejadas de modo a possibilitar o desenvolvimento de operações semióticas, que se dinamizaram com o uso da ferramenta computacional, indo ao encontro da proposta de Duval (2004). Portanto, é possível concluir que o estudo da integral no cálculo de área requer, entre outros, a mobilização de operações semióticas, as quais auxiliaram os alunos na compreensão do objeto em estudo. Outrossim, que a temática equivalência de áreas pode ser explorada no ensino da integral.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano** - Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução: Myrian Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía – Grupo de Educación Matemática. 2ª Edición. Santiago de Cali, Colombia: 2004.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Makron Books, 2007.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3ed. São Paulo: Harbra, 1994. v1.

STEWART, J. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. v1.

Lucia Menoncini: Doutora em Educação Científica e Tecnológica. Professora de Matemática na UFFS. Chapecó, SC, Brasil. E-mail: lucia.menoncini@uffs.edu.br

Méricles Thadeu Moretti: Doutor em Didática da Matemática/UNISTRA. Professor permanente do PPGECT/UFSC. Florianópolis, SC, Brasil. E-mail: mthmoretti@gmail.com